Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi
Özel Sayı 40, S. 123-126, Eylül 2022

Araştırma Makalesi

www.ejosat.com ISSN:2148-2683

European Journal of Science and Technology
Special Issue 40, pp. 123-126, September 2022

Research Article

Genelleştirilmiş Dışbükey Gövde Kombinasyonu Yaklaşımı

Ali Çalışkan[1], Selcan Kocabaş[2*]

[1] Kırklareli Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kırklareli, Türkiye, (ORCID: 0000-0002-2693-3269), acalıskan@klu.edu.tr
[2*] Kırklareli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kırklareli, Türkiye (ORCID: 0000-0003-3416-9608), 1208251101@ogrklu.edu.tr

(1st International Conference on Innovative Academic Studies ICIAS 2022, September 10-13, 2022)

(**DOI:** 10.31590/ejosat.1172941)

ATIF/REFERENCE: Çalışkan, A. & Kocabaş, S. (2022). Genelleştirilmiş Dışbükey Gövde Kombinasyonu Yaklaşımı. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, (40), 123-126.

Öz

Bilgisayar destekli geometrik tasarımın önemli konuları içerisinde yer alan dışbükey gövde hesabı bu çalışmanın çıkış noktasını oluşturmaktadır. Literatürde birçok tanımı bulunan dışbükey gövde, ele aldığımız çalışmada dışbükey gövde kombinasyonu yaklaşımı ile hesaplanmıştır. Verilen nokta kümesi için tüm olası dışbükey kümelerin kombinasyonu tanımından [13], n noktadan oluşan konveks gövde elde edilmiştir. Çalışmada ele alınan konveks gövde yaklaşımı ile ortaya konan özel ve genelleştirilmiş metotların matematik ve geometrinin yanında endüstriyel hayatla da ilişkisi gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bilgisayar destekli geometrik tasarım, konveks gövde, dışbükey küme kombinasyonu, n-noktalı dışbükey gövde

Generalized Convex Hull Combination Approach

Abstract

Convex hull calculation, which is one of the important topics of computer aided geometric design, constitutes the starting point of this study. Convex hull, which has many definitions in the literature, was calculated with the convex hull combination approach in our study. From the definition of the combination of all possible convex sets for the given point set [13], a convex body consisting of n points is obtained. In addition to mathematics and geometry, the relationship between the special and generalized methods revealed by the convex body approach, which is discussed in the study, with industrial life is shown.

Keywords: Computer-aided geometric design, convex hull, convex set combination, n-point convex hull

1. Giriş

Bu kısımda dışbükey gövde kombinasyonu ile ilgili temel bilgiler sunulmuştur.

Afin uzayın aksiyomları nedeniyle vektör ile vektörün uç noktası arasında birebir eşleme vardır. [2].

Tanım1: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sıfırdan farklı olup $A, B, C \in E^3$ noktalarının yer vektörleri $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ için $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ sağlanıyorsa A, B, C noktaları bir doğru üzerindedir denir [3].

Tanım2: $\alpha, \beta, \gamma, \vartheta \in \mathbb{R}$ sıfırdan farklı olup $A, B, C, D \in E^3$ noktalarının yer vektörleri $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ için $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \vartheta\vec{d} = \vec{0}$ ve $\alpha + \beta + \gamma + \vartheta = 0$ sağlanıyorsa A, B, C, D aynı düzlemdedir denir [4].

Tanım3 (Üçgenlerin Cebirsel Ölçümü $[ABC]$**):**

Bir ABC üçgeninin alanı $S = |\alpha|$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $\alpha = [ABC]$ değerine üçgenin cebirsel ölçümü denir.

$[ABC]$ nin yönü pozitif (saat yönünün tersi) ise $\alpha = +S$; $[ABC]$ nin yönü negatif (saat yönü) ise $\alpha = -S$ olur [5], [10].

Yönlendirilmiş bir düzlemde üç noktadan oluşan temel üçgenin cebirsel ölçümü bir noktanın yerini belirlemede büyük kolaylık sağlar.

Tanım 4: AB kenarları ortak ABM ve ABN gibi iki üçgenin ortak olmayan köşelerinin AB kenarını kestiği nokta X olmak üzere

$$\frac{XM}{XN} = \frac{[ABM]}{[ABN]} = \frac{\alpha}{\beta}$$

oranına üçgenlerin cebirsel ölçümlerinin oranı denir.

Sırayla doğru (iki nokta) ve üçgen (üç nokta) üzerinde yaptığımız bu tanımlamalar daha fazla noktaya genişletilebilir. n-noktadan oluşan düzlemsel dışbükey gövdelerin hesabı hesaplamalı geometrinin en temel problemlerinden biridir. Bir nokta kümesinin dışbükey (konveks) gövdesi, tüm noktaları içeren en küçük dışbükey küme veya noktaları içeren tüm dışbükey kümelerin kesişimi olarak tanımlanır [1]. Ele aldığımız bu çalışmada dışbükey gövde verilen noktaların tüm olası dışbükey gövde kombinasyonları üzerine inşa edilecektir.

2. Materyal ve Metot

Önceki çalışmamızda [13] sonlu nokta kümesinin dışbükey gövde kombinasyonu bulunurken ilk olarak noktanın üzerinde yer aldığı doğru elde edilmiştir. Ardından noktanın, iç bölgesinde yer aldığı üçgen kombinasyonu hesaplanıp sonrasında teknoloji ve sanayinin önemli operasyonlarından biri olan rafineri probleminin çözümünde bu metotlar uygulanmıştır.

Bu çalışmamızda da; doğru ve düzlem üzerinde incelenen problemin $n-$ noktada hesaplanabilmesi için genelleştirilmiş dışbükey gövde kombinasyonu formülü verilmiştir. Ayrıca rafineri sürecindeki karışım problemlerinin çözümü bu formül baz alınarak sağlanmıştır.

Tanım 5: $P \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme olsun. Kümenin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası yine kümeye aitse yani

$\forall a \in [0,1]$ için $x_1, x_2 \in P$ olmak üzere $ax_1 + (1-a)x_2 \in P$ ise Pkümesine konveks küme denir. [6], [7].

Tanım 6: **Dışbükey Gövde Kombinasyonu**

$P = \{p_1, p_2, \dots p_n\}$ nokta kümesi için

$$L := \sum_{j=1}^{n} l_j \quad \text{ve} \quad \lambda_i = \frac{l_i}{L} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\forall i, \lambda_i \geq 0 \ \text{için} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \ \text{sağlanıyorsa} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i,$$

P kümesinin dışbükey gövde kombinasyonudur denir [1], [7] ve [9].

Lemma 1:

A ve B bir doğru üzerinde sabit iki nokta, P bu doğru üzerinde herhangi bir nokta ise bu noktaların yer vektörleri $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ ve α, β ≠ 0 için

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{AB} \quad \text{veya} \quad \vec{p} = \frac{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}}{\alpha + \beta} \qquad (1)$$

olur.

İspat: P noktası AB'yi $\frac{AP}{PB} = \frac{\beta}{\alpha}$ gibi bir oranda böleceğinden P noktasının yeri AB arasında veya dışında olma hallerine göre sırayla $\frac{\beta}{\alpha}$ pozitif veya negatif olur.

$\frac{\beta}{\alpha}$ cebirsel sayısı $\beta + \alpha \neq 0$ için

$$\frac{AP}{\beta} = \frac{PB}{\alpha} = \frac{AP + PB}{\beta + \alpha} = \frac{AB}{\beta + \alpha} \quad \text{olduğundan}$$

$$\vec{p} = \frac{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}}{\alpha + \beta} \quad \text{elde edilir.}$$

Lemma 1'in karşıtı da doğrudur.

Lemma 2:

A, B, C düzlemde aynı doğru üzerinde bulunmayan sabit noktalar, P düzlemde herhangi bir nokta ise bu noktaların yer vektörleri $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$; α, β ve $\gamma \neq 0$ için

$$\vec{p} = \frac{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}}{\alpha + \beta + \gamma} \qquad (2)$$

gelir.

İspat:

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ ve $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ise

A, B, C bir doğru üzerinde olduğundan

$(\alpha+\beta+\gamma)\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\,;\ \ \alpha+\beta+\gamma\neq 0$ dır.
Aksi halde $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-(\alpha+\beta)\vec{c}=\vec{0}$ yani
$\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ olur ki bu da ancak A, B, C'nin aynı doğru üzerinde bulunması ile mümkündür. Bu durum hipoteze aykırıdır.

$$\alpha+\beta+\gamma\neq 0 \ i\c{c}in\ \ \vec{p}=\frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\alpha+\beta+\gamma} \text{ gelir.}$$

Lemma 2'nin karşıtı da doğrudur.

Sonuç:

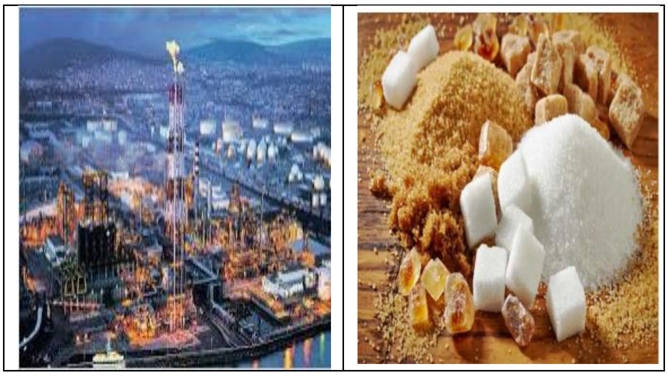
A_1,A_2,... ,A_n gibi n noktadan meydana gelen bir şekilde herhangi bir P noktasının $\vec{p}$ yer vektörü $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1}\neq 0$ için

$$\vec{p}=\frac{\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+\alpha_{n+1}\vec{a}_{n+1}}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1}} \qquad (3)$$

olduğu anlaşılır.

3. Araştırma Sonuçları ve Tartışma

Bu kısımda yukarıda verdiğimiz lemmalar ile dışbükey kombinasyon uygulaması sanayinin önemli bir meselesi olan rafine işlemi üzerinden ele alınmıştır. Rafineriler temel malzemelerin daha kullanışlı formlarda işlendiği işleme tesisleridir. Rafineriler ham madde olarak kullanılması zor olan malzemelerin işlenmesini, gündelik ya da endüstriyel hayatta kullanılmasını mümkün kılmaktadır. Örnek olarak Şekil 1 de petrol, Şekil 2 de ise şeker rafinerisi görülmektedir.



Şekil 1: Petrol ve Şeker Rafineri Tesisi [10], [11]

Rafineri uygulamalarından petrol rafinerisini ele alalım. Petrol kuyularının sondajı sonucu elde edilen ürün saf bir ürün olmayıp birkaç farklı bileşenli bir karışımdır. Karışımların içerdiği bileşenlerin oranları farklı kaynaklar arasında değişkenlik gösterebilir. Bu bazen kullanılabilir bazen de farklı kuyuların çıktıları karıştırılarak rafine işlemi için uygun oranlarda bir karışım üretilebilir. Bu durum için aşağıda üç farklı uygulama verilmiştir.

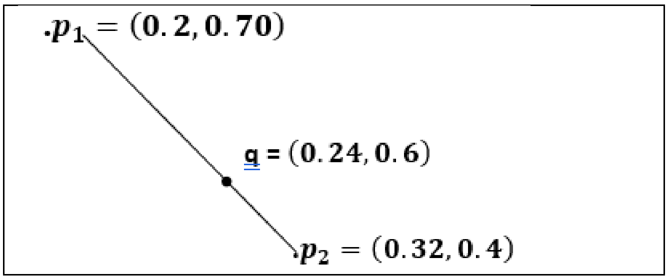
Uygulama 1: Bu uygulamada doğru üzerinde inceleme yapılacaktır. Bunun için ürünün yalnızca iki bileşeniyle (bunlar A ve B olsun) ilgileneceğiz. Bize %20 A bileşeni ve %70 B bileşeni içeren bir ζ_1 karışımı, %32 A ve %40 B içeren başka bir ζ_2 karışımı verildiğinde amacımız %24 A ve %60 B içeren bir karışıma ulaşmak olacaktır. Gerçek hayattan aldığımız bu problemi geometrik çözümle sonuca vardırabilmek için $\zeta_1\ ve\ \zeta_2$ karışımlarını düzlemdeki noktalarla; $p_1 \coloneqq (0.20, 0.70)$, $p_2 \coloneqq (0.32, 0.40)$ ile temsil edelim. Lemma 1-(1) den faydalanarak $p_1\ ve\ p_2$ noktaları arasındaki q noktası

$$(0.24, 0.60)=\frac{\alpha(0.20{,}0.70)+\beta(0.32{,}0.40)}{\alpha+\beta}$$

olur, bu eşitlikten $\alpha = 2\beta$ ve nihayet

$$\vec{q}=\frac{2}{3}\overrightarrow{p_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{p_2} \text{ elde edilir.}$$

Buradan aradığımız karışım $\zeta_1\ ve\ \zeta_2$ karışımlarını 2:1 oranında birleştirdiğimizde elde ederiz. Geometrik olarak ise $\vec{q}$ yer vektörü, Şekil 3 de görüldüğü gibi $p_1\ ve\ p_2$ noktalarından geçen ana karışım doğrusu üzerinde yer alır.



Şekil 2: ζ_1 ve ζ_2 karışımlarından elde edilen ana karışım doğrusu

Böylece problemimizde verilen iki karışımı kullanarak elde etmek istediğimiz üçüncü karışıma ulaştık, fakat %26 A ve %44 B içeren bir karışım yapmak istediğimizde bu mümkün değildir çünkü ana karışım doğrusu üzerinde yer almaz.

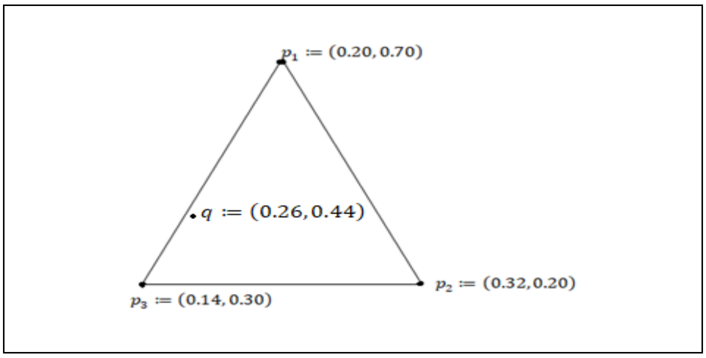
Uygulama 2: %14 A ve %30 B içeren üçüncü bir ζ_3 karışım varsa istenilen sonuca ulaşıp ulaşamayacağımızı test edeceğiz. ζ_1, ζ_2 ve ζ_3 karışımlarını düzlemdeki $p_1 \coloneqq (0.20, 0.70), p_2 \coloneqq (0.32, 0.20)$ $p_3 \coloneqq (0.14, 0.30)$ noktaları ile temsil edelim. Lemma 2-(2) den problemi çözersek:

$$(0.26, 0.44)=\frac{\alpha(0.2, 0.7)+\beta(0.32, 0.4)+\gamma(0.14, 0.3)}{\alpha+\beta+\gamma}$$

olur, bu eşitlikten $\gamma = \alpha$ ve $\beta = 3\alpha$ ve nihayet

$$\vec{q}=\frac{1}{5}\overrightarrow{p_1}+\frac{3}{5}\overrightarrow{p_2}+\frac{1}{5}\overrightarrow{p_3} \text{ elde edilir.}$$

Aradığımız karışımı $\zeta_1, \zeta_2\ ve\ \zeta_3$ karışımlarını 1:3:1 oranında birleştirdiğimizde elde ederiz. Geometrik olarak $\vec{q}$ yer vektörü, Şekil 4 de olduğu gibi p_1, p_2 ve p_3 noktalarından geçen ana karışım üçgeni içinde yer alır.

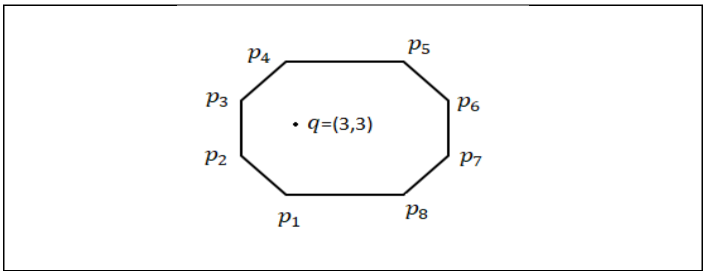


Şekil 3: ζ_1, ζ_2 ve ζ_3 karışımlarından elde edilen ana karışım üçgeni

Uygulama 3: Oluşturacağımız karışımda n tane bileşen hesaba katılmak isteniyorsa, o zaman bu karışım düzlemde n adet nokta ile temsil edilecektir.
Belirttiğimiz genelleştirilmiş durumdan hareketle elimizde 8 adet farklı karışım olduğunu varsayalım. Bu karışımlar sırayla;
λ_1: %20 A ve %10 B, λ_2: %10 A ve %20 B, λ_3: %10 A ve %30 B, λ_4: %20 A ve %40 B, λ_5: %30 A ve %40 B, λ_6: %40 A ve %30 B, λ_7: %40 A ve %20 B, λ_8: %30 A ve %10 B bileşenlerini içersin. Amacımız bu karışımları kullanarak %30 A ve %30 B içeren yeni bir q karışımı elde etmek olacaktır. İlk olarak Uygulama 1 ve Uygulama 2 ye benzer şekilde karışımları düzlemdeki noktalarla ifade edelim. O zaman
$p_1 \coloneqq (2,1)$; $p_2 \coloneqq (1,2)$; $p_3 \coloneqq (1,3)$; $p_4 \coloneqq (2,4)$; $p_5 \coloneqq (3,4)$; $p_6 \coloneqq (4,3)$; $p_7 \coloneqq (4,2)$; $p_8 \coloneqq (3,1)$
ve $p_9 \coloneqq (3,3)$ sırayla eldeki karışımların ve oluşturacağımız yeni karışımın yer vektörleridir. Sonuç-(3) eşitliğini kullanarak

$$q = \frac{1}{16}\overrightarrow{p_1} + \frac{1}{16}\overrightarrow{p_2} + \frac{1}{16}\overrightarrow{p_3} + \frac{1}{16}\overrightarrow{p_4} + \frac{5}{16}\overrightarrow{p_5} + \frac{5}{16}\overrightarrow{p_6} + \frac{1}{16}\overrightarrow{p_7} + \frac{1}{16}\overrightarrow{p_8}$$

gelir ve nihayet bu eşitlikten q karışımının verilen karışımlardan sırayla 1:1:1:1:5:5:1:1 oranında birleştirilerek elde edileceği anlaşılır.



Şekil 4: Düzlemde 8 noktalı ana karışım dışbükey gövdesi

4. Sonuç

Ele aldığımız bu çalışmada; bir veri setinin yorumlanabilmesi ve üzerindeki bazı hesaplamaların yapılabilmesi için dışbükey küme kombinasyonundan yararlanılmıştır. Bu amaçla (3) formülü baz alınarak dışbükey küme kombinasyonu hesaplanmış ve herhangi bir noktanın bu küme içerisinde yer alıp almadığının tespiti yapılmıştır. Bunlara ek olarak dışbükey küme kombinasyonları ile ilgili üç farklı uygulama sunulmuştur. Bu çalışmada sunulan yöntem ile petrol rafinerisinde elde edilen ürünlerin karışım oranlarının belirlenmesine katkı sağlanmıştır. Bu çalışmanın amacı dışbükey küme kombinasyonu ile üretim ve sanayi arasındaki ilişkiyi ifade edip ortaya koymaktır.

5. Teşekkür

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında sağlamış olduğu katkı ve desteklerinden ötürü Prof. Dr. Ali Çalışkan'a yürekten teşekkür ederim.

Kaynakça

[1] M. Berg, M. Kreveld, M. Overmars and O. Schwarzkopf. Computational Geometry Algorithms and Applications, 2000.
[2] S. İzumiya and T. Sano. Generic affine differential geometry of plane curves., Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 41(02):315 – 324, 1998.
[3] J.F. Ritt. Theory of functions. Columbia University Press, 1947.
[4] M. Melkemi and M. Djebali. Computing the shape of a planar points set, Pattern recognition, Volume 33, Issue 9, Pages 1423-1436, 2000.
[5] A. Kritchevsky. Oriented Areas and the Shoelace Formula, 2018
[6] A.C. Thompson., Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition), 2003.
[7] N. Unnikrishnan Nair, N. Balakrishnan, in Reliability Modelling and Analysis in Discrete Time, 2018
[8] A. Bykat. Convex hull of a finite set of points in two dimensions. Inform. Process. Lett., 7:296-298, 1978.
[9] F. P. Preparata. An optimal real-time algorithm for planar convex hulls. Commun. ACM, 22:402-405, 1979.
[10] R. Sedgewick and K. Wayne, The textbook Algorithms, 4th Edition.
[11] https://www.haberturk.com/ersan-petrol-kahramanmarasa-petrol-rafinerisi-kuracak-1768587-ekonomi
[12] https://best.cheaponline2022.ru/content?c=rafine%20edilmemi%C5%9F%20ne%20demek&id=27
[13] A. Çalışkan and S. Kocabaş, Rafineri İşleminde Dışbükey Gövde Kombinasyonunun Önemi, 4. Uluslararası Harran Kongreleri, 2022