Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi
Özel Sayı, 34, S. 665-671, Mart 2022

Araştırma Makalesi

www.ejosat.com ISSN:2148-2683

European Journal of Science and Technology
Special Issue 34, pp. 665-671, March 2022

Research Article

Lucas Sayı Dizisinin Bilgi Entropisi Yönünden İncelenmesi

Bünyamin ŞAHİN[1*], İhsan TUĞAL[2]

[1*]Matematik Bölümü, Fen Fakültesi, Selçuk Üniversitesi, Konya, TÜRKİYE (ORCID: 0000-0003-1094-5481), bunyamin.sahin@selçuk.edu.tr.
[2] Yazılım Mühendisliği, Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, Muş Alparslan Üniversitesi, Muş, TÜRKİYE (ORCID: 0000-0003-1898-9438)), i.tugal@alparslan.edu.tr

(2nd International Conference on Applied Engineering and Natural Sciences ICAENS 2022, March 10-13, 2022)

(**DOI:** 10.31590/ejosat.1083933)

ATIF/REFERENCE: Şahin, B. & Tuğal, İ. (2022). Lucas Sayı Dizisinin Bilgi Entropisi Yönünden İncelenmesi. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, (34), 665-671.

Öz

Lucas sayı dizisi, ilk iki terimi $L_1 = 1$ ve $L_2 = 3$ olmak üzere $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ indirgeme bağıntısı ile elde edilir. Bu çalışmada Lucas sayı dizisi, bilgi entropisi yönünden incelendi. Sistemlerin entropi değerleri hesaplanırken sayı üçgenlerinden yararlanmak olağan bir uygulamadır. Fibonacci sayıları Pascal üçgeninden ve Lucas sayıları Lucas üçgeninden elde edilebileceğinden, bu üçgenlerin entropisi hesaplandı. Elde edilen sonuçlar Leibniz'in harmonik üçgeniyle kıyaslandı.

Anahtar Kelimeler: Entropi, Lucas Sayı Dizisi, Pascal Üçgeni, Lucas Üçgeni, Leibniz Üçgeni.

Investigation of Lucas Number Sequence in Term of Information Entropy

Abstract

Lucas number sequence is obtained by the recurrence relation $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$with initial terms $L_1 = 1$ and $L_2 = 3$. In this paper, the Lucas number sequence was investigated in term of information entropy. The using of number triangles is an always application when the entropy measures of systems are calculated. Since the Fibonacci number sequence can be obtained from Pascal triangle and the Lucas number sequence can be obtained from Lucas triangle, the entropy measures of these triangles were calculated. The obtained results were compared with the harmonic triangle of Leibniz.

Keywords: Entropy, Lucas Number Sequence, Pascal Triangle, Lucas Triangle, Leibniz Triangle.

[*] Sorumlu Yazar: bunyamin.sahin@selcuk.edu..tr

1. Giriş

Matematik, desenlerin bilimidir ve matematikçiler bu desenleri anlamaya ve çeşitli yöntemlerle yenilerini keşfetmeye çalışırlar. Üçgen sayı dizisi, sayıların bir seri veya dizi halinde düzenlenmiş eşkenar üçgen şeklinde temsilidir. Üçgen şeklindeki sayılar içinde çeşitli desenler barındırır. Bu desenler bilimde fazlasıyla kullanılır [1]. Bu yüzden üçgenleri incelemek, özelliklerini ortaya çıkarmak her zaman ilgi çekmiştir. Üzerinde çalışmaların devam ettiği konulardan biridir. Sayı teorisinde, binom katsayılarının özyinelemeli dizilerinin ve ilgili karakteristiklerinin incelenmesi yüksek merak düzeyine sahiptir

Bir sistemdeki belirsizliği veya tersi anlamda bilgi miktarını ifade eden ölçümlerden birisi entropidir. Belirsizlik ölçümü için entropi önemli rollere sahiptir. Üçgen sayı dizileri bir sistem olarak düşünüldüğünde bu yapıları entropi ile anlamaya çalışmak ilgimizi çekebilir. Pascal üçgeni ile belirsizlik ölçümü arasındaki bağlantının nasıl kurulacağı ilginç bir konudur. En çok kullanılan entropilerden biri olan Tsallis entropisi, Pascal üçgeni ile modellenmiştir [2]. Ancak diğer entropi fonksiyonlarının Pascal üçgeni ile ilişkisi hala açık bir konudur [3]. Farklı üçgenlerde entropi değerlerinin ölçülmesi ve karşılaştırılması bize yeni bakış açıları sağlayacaktır. Bu çalışmada üçgenlerin entropi değerlerini ölçerek ne yönde bilgi barındırdığını ve üçgen büyüdükçe belirsizliğin nasıl değiştiğini görmeye çalıştık.

Üçgenleri farklı açılardan inceleyen, matematiksel olarak ispatlar ortaya koyan birçok çalışma yapılmıştır. Bunlardan en çok inceleneni ve bilineni Pascal üçgenidir. Matematikte Pascal üçgeni, olasılık teorisinde ortaya çıkan binom katsayılarının üçgen bir dizisidir [4]. Pascal üçgeni, oluşturulması basit ve matematiksel desenler açısından zengindir.

Bu üçgen çok daha önceleri bilinmesine rağmen Fransız matematikçi, filozof ve teolog Blaise Pascal, üçgen hakkında kapsamlı bir çalışma yapan ilk kişi olmuştur. Üçgende, kombinasyonlar ve permütasyonlar teorisinde önemli bir rol oynayan binom katsayıları geometrik bir şekilde düzenlenmiştir. Pascal, bu katsayılar ve olasılık teorisi arasındaki önemli bağlantıyı keşfetti.

Lucas üçgeni, Pascal üçgenine benzer bir desen oluşturan bir polinomun katsayıları dizisidir. Lucas sayısı, Fibonacci sayılarıyla aynı tekrarlama ilişkisine sahip olduğundan, 1967' de Mark Feinberg bir polinomun açılımının katsayılarını inceledi. Katsayılar, Lucas Üçgeni olarak bilinen Pascal üçgen modeli gibi üçgen bir düzende düzenlendi [5]. Neville Robbins, Pascal üçgenine benzer özelliklere sahip sonsuz bir üçgen dizi olan Lucas üçgeninin birçok özelliğini araştırdı [6].

Calculus'un kaşiflerinden biri olan büyük Alman bilim adamı Gotfried Wilhelm Leibniz, belirli yineleme bağıntısı koşulunu sağlayan birim kesirleri içeren bir sayı üçgeni tanıttı. Leibniz tarafından 1673'te açıklanan Leibniz üçgeni, bilim insanları tarafından keşfedilen birçok ilginç özellik içerir. Leibniz üçgeninin dış köşegeni Harmonik sayılar tarafından işgal edildiğinden, Leibniz üçgenini Harmonik üçgen olarak da adlandırabiliriz. Leibniz, harmonik seriler üzerine yaptığı çalışmadan harmonik üçgeni tanımlar, özelliklerini analiz eder ve onu, 'tüm farkların toplamları' olarak adlandırdığı bir prosedürle sonsuz serilerin toplamlarını gerçekleştirmek için kullanır [7].

Literatüre baktığımızda üçgenler ve entropi ilişkisi ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Güç kümesininin anlamını açıklamak için kombinatoryal sayı, Pascal üçgeni ve bilgi ölçüleri gösterilmiştir. Ayrıca Pascal üçgeni ile güç kümesi arasındaki ilişki bilgi ölçüsü açısından Deng entropisi tarafından nicel olarak verilmiştir [4].

Beta İntegral formülasyonu, Leibniz üçgeni ile ilgili birkaç önemli özelliği belirlemeyi sağladı. Sonsuz Hokey Sopası teoremi ve Sonsuz Üçgen Toplamı teoremi, Leibniz üçgeninin girişlerinin Beta Integral formülasyonu kullanılarak yeniden formüle edilmesi ile yeniden ispatlandı [7].

Kanıt teorisinde temel olasılık atamasının belirsizliğini ölçmek için çeşitli entropiler mevcuttur. Bunlardan biri olan Deng entropisi ile sözde-Pascal üçgeni arasındaki ilişki Dempster-Shafer kanıt teorisine göre incelendi [3].

Yapılan çalışmada sistemin durumuna ilişkin bilgisizliğin miktarını ölçmeyi amaçlayan bir kavram olan fiziksel entropi yeniden incelendi. Ayrık durumların olasılık yapısının, ilginç bir şekilde, hem Pascal hem de Leibniz üçgenleriyle yakından ilişkili olduğu gösterildi [2].

Fibonacci sayılarının, alt dizileri olan çift ve tek indisli Fibonacci sayılarının entropileri hesaplandı [8]. Lucas sayıları da Fibonacci sayıları gbi indirgeme bağıntısıyla elde edilmektedir.

Bu çalışmada Lucas sayı dizisi bilgi entropisi yönünden ele alındı. Sistemlerin entropi değerleri hesaplanırken sayı üçgenlerinden yararlanmak olağan bir uygulamadır. Fibonacci sayıları Pascal üçgeninden, Lucas sayıları ise Lucas üçgeninden elde edilebileceğinden, bu üçgenlerin entropisi hesaplandı. Ayrıca, elde edilen sonuçlar Leibniz'in harmonik üçgeniyle kıyaslandı.

2. Materyal ve Metot

Bu bölümde Shannon'ın bilgi entropisi, Lucas sayı dizisi ve bazı alt dizileri hakkında bilgiler sunulacaktır.

Lucas sayı dizisi, ilk iki terimi $L_1 = 1$ ve $L_2 = 3$ olmak üzere $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ indirgeme bağıntısı ile elde edilir. Buradan hareketle Lucas sayı dizisinin bazı terimleri şu şekilde verilebilir; $L_1 = 1$, $L_2 = 3, L_3 = 4$, $L_4 = 7, L_5 = 11$, $L_6 = 18$, $L_7 = 29, L_8 = 47$.

Tanım 2.1. Bir sistemin olasılık dağılımı $p_1, p_2, \dots, p_n$ için $0 \leq p_i \leq 1$ ve $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, olmak üzere Shannon'ın bilgi entropisi aşağıdaki gibi hesaplanır [8]

$$I = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i.$$

Yazımı kolaylaştırma adına bundan sonra $\log_2 p_i$ yerine $\log p_i$ yazımı kullanılacaktır.

Teorem 2.2. Lucas sayılarının toplamı, çift indisli Lucas sayılarının toplamı, tek indisli Lucas sayılarının toplamı ve Lucas sayılarının karelerinin toplamı aşağıda verilen eşitliklerle hesaplanır.

$$i)\ \sum_{i=1}^{n} L_i = L_1 + L_2 + \cdots + L_n = L_{n+2} - 3$$

$$ii)\ \sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_2 + L_4 + \cdots + L_{2n} = L_{2n+1} - 1$$

$$iii)\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_1 + L_3 + \cdots + L_{2n-1} = L_{2n} - 2$$

$$iv)\ \sum_{i=1}^{n} L_i^2 = L_1^2 + L_2^2 + \cdots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2$$

Lucas sayılarının, çift indisli Lucas sayılarının, tek indisli Lucas sayılarının ve Lucas sayılarının karelerinin entropi değerleri Tanım 2.1 ve Teorem 2.2 yardımıyla Tanım 2.3 de ifade edilecektir.

Tanım 2.3. $i)$ Lucas sayı dizisinin bilgi entropisi aşağıdaki eşitlik ile hesaplanır

$$I_L = -\sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i} \log \frac{L_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{L_{n+2} - 3} \log \frac{L_i}{L_{n+2} - 3}$$

$ii)$ Çift indisli Lucas sayılarının bilgi entropisi aşağıdaki eşitlik ile hesaplanır

$$I_L = -\sum_{i=1}^{n} \frac{L_{2i}}{\sum_{i=1}^{n} L_{2i}} \log \frac{L_{2i}}{\sum_{i=1}^{n} L_{2i}} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{L_{2i}}{L_{2n+1} - 1} \log \frac{L_{2i}}{L_{2n+1} - 1}.$$

$iii)$ Tek indisli Lucas sayılarının bilgi entropisi aşağıdaki eşitlik ile hesaplanır

$$I_L = -\sum_{i=1}^{n} \frac{L_{2i-1}}{\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1}} \log \frac{L_{2i-1}}{\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1}} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{L_{2i-1}}{L_{2n} - 2} \log \frac{L_{2i-1}}{L_{2n} - 2}.$$

$iv)$ Lucas sayılarının karelerinin bilgi entropisi aşağıdaki eşitlik ile hesaplanır

$$I_L = -\sum_{i=1}^{n} \frac{L_i^2}{\sum_{i=1}^{n} L_i^2} \log \frac{L_i^2}{\sum_{i=1}^{n} L_i^2} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{L_i^2}{L_n L_{n+1} - 2} \log \frac{L_i^2}{L_n L_{n+1} - 2}$$

Lucas sayıları $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ indirgeme bağıntısı yardımıyla hesaplanır. İndirgeme bağıntısına gerek kalmadan hesaplanabilen sonsuz bir sayı dizisi ile karşılaştırma yapılabilmesi için pozitif tamsayılardan yararlanacağız. Bunun için öncelikle, ardışık tamsayıların, ardışık çift, tek tamsayıların ve ardışık sayıların karelerinin toplamını veren formülleri hatırlatalım.

Teorem 2.4.

$$i)\ \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$ii)\ \sum_{i=1}^{n} 2i = 2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$$

$$iii)\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2$$

$$iv)\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Tanım 2.5. $i)$ Ardışık pozitif tamsayıların bilgi entropisi aşağıdaki formül ile hesaplanır

$$I_Z = -\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{\sum_{i=1}^{n} i} \log \frac{i}{\sum_{i=1}^{n} i} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{\frac{n(n+1)}{2}} \log \frac{i}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$ii)$ Ardışık pozitif çift tamsayıların bilgi entropisi aşağıdaki formül ile hesaplanır

$$I_Z = -\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{\sum_{i=1}^{n} 2i} \log \frac{2i}{\sum_{i=1}^{n} 2i} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n(n+1)} \log \frac{2i}{n(n+1)}.$$

$iii)$ Ardışık pozitif tek tamsayıların bilgi entropisi aşağıdaki formül ile hesaplanır

$$I_Z = -\sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{\sum_{i=1}^{n} 2i-1} \log \frac{2i-1}{\sum_{i=1}^{n} 2i-1} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^2} \log \frac{2i-1}{n^2}.$$

iv) Ardışık pozitif tamsayıların karelerinin bilgi entropisi aşağıdaki formül ile hesaplanır

$$I_L = -\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{\sum_{i=1}^{n} i^2} \log \frac{i^2}{\sum_{i=1}^{n} i^2}$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \log \frac{i^2}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Bilgi entropisi tanımında p_i ler yerine x alınarak aşağıdaki f fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonun maksimum noktası araştırmak için türevi alınıp 0' a eşitlenerek

$$f(x) = -x \log_2 x$$

$$f'(x) = -\log_2 x - \frac{1}{ln2}$$

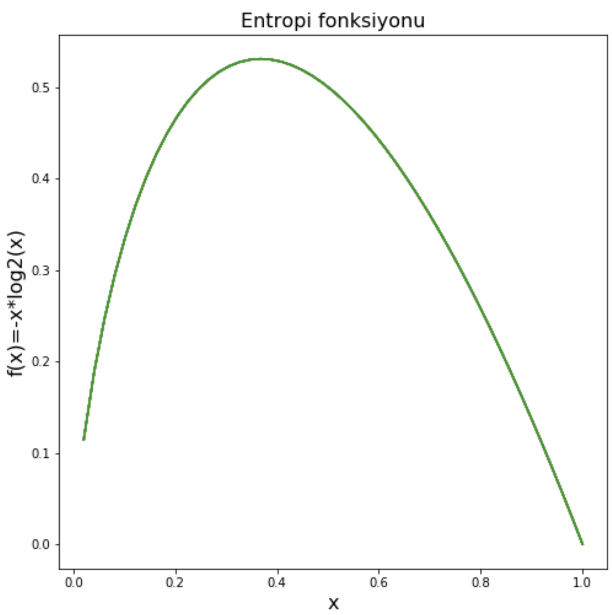
$$f'(x) = -\log_2 x - \frac{1}{ln2} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$$

bulunur. İkinci türev yardımıyla da bulunan noktanın bir maksimum noktası olduğu anlaşılır. f fonksiyonunun grafiği Şekil 1'de gösterilmiştir.

$$f''(x) = -\frac{1}{xln2}$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{e}{ln2} \approx -3{,}922 < 0$$

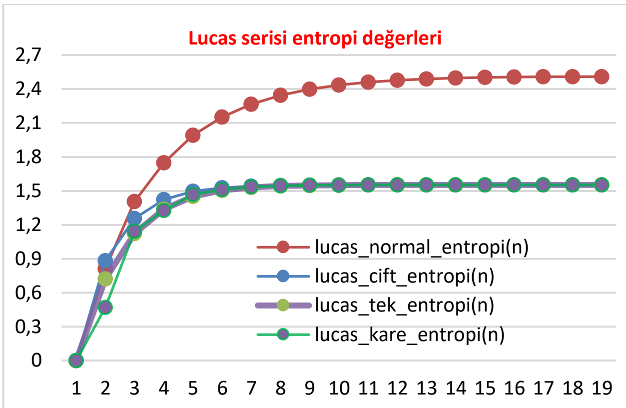


Şekil 1. Entropi fonksiyonunun grafiği

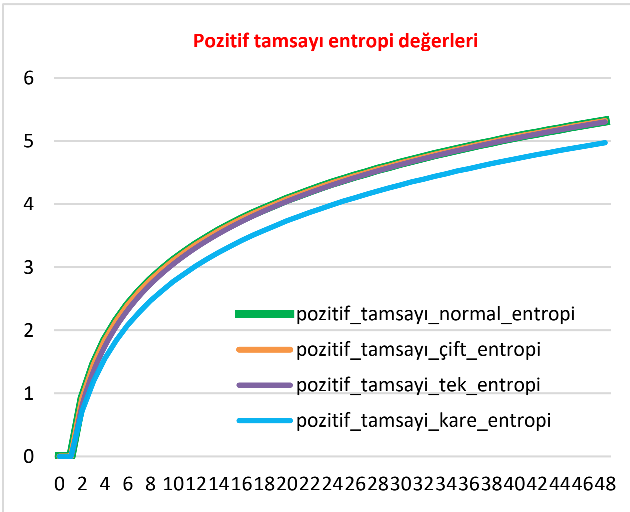
3. Araştırma Sonuçları ve Tartışma

Lucas sayılarının entropisi, çift indisli, tek indisli Lucas sayılarının entropileri ve Lucas sayılarının karelerinin entropileri Tablo 1 de ve Şekil 2 de gösterilmiştir. Lucas sayılarının entropisi 2,51179'a, alt diziler olan çift ve tek indisli Lucas sayılarının entropisi ise 1,55237'e yakınsamaktadır. Lucas sayılarının kareleri ise alt dizilere benzer şekilde 1,55237'e yakınsamaktadır.

Lucas sayıları $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ indirgeme bağıntısıyla elde edilmektedir. Bunun anlamı bir Lucas sayısının kendinden önceki iki sayının toplamıyla elde edilmesidir. Buradan elde edilen sonuçları karşılaştırabilmek için bir de indirgeme bağıntısına ihtiyaç duyulmayan bir sayı dizisi kullanılacaktır. Bunun için ardışık pozitif tamsayılar, ardışık pozitif çift sayılar ve tek sayılar ile ardışık pozitif tamsayıların kareleri kullanılmıştır. Şekil 3'de pozitif tamsayı grubu entropi değerleri gösterilmiştir. Grafikler incelendiğinde, artış hızı azalmakla birlikte entropi değerlerinin Lucas sayılarında olduğu gibi belli bir değere yakınsamadığı ortaya çıkmaktadır



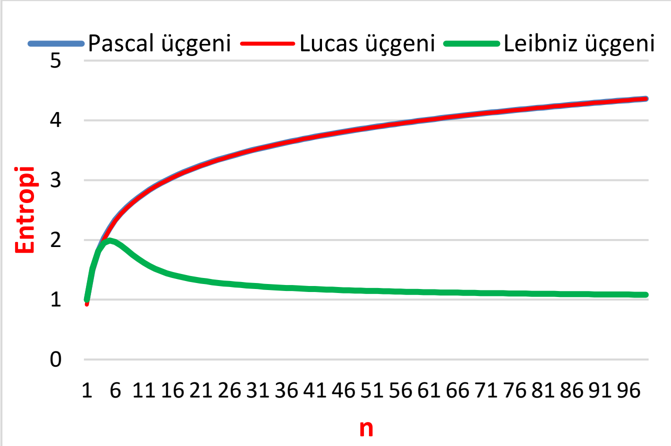
Şekil 2. Lucas Sayı Grubu Entropileri



Şekil 3. Pozitif Tamsayılar Grubu Entropileri

Entropi değerlerinin analizi için sayı üçgenlerinden yararlanılabilir. Pascal üçgeninde ilk terimden başlayarak birbirine paralel doğruların çizilmesiyle aynı doğru üzerindeki sayıların toplamının Fibonacci sayılarını verdikleri bilinmektedir. Benzer şekilde Lucas üçgeninde de aynı yöntemle Lucas sayıları elde edilebilmektedir. Pascal üçgeni, Lucas üçgeni ve Leibniz'in harmonik üçgeni sırasıyla Şekil 5, Şekil 6 ve Şekil 7'de verilmiştir.

Burada dikkat edilmesi gereken nokta Pascal ve Lucas üçgeninde her satırdaki uç değerler sabit olmakla birlikte arada kalan sayılar bir üst satırdaki iki sayının toplamı şeklinde elde edilmektedir. Leibniz'in harmonik üçgeninde ise tam tersine alt satırdaki iki sayının toplamı üst satırdaki sayıyı vermektedir. Bahsi geçen üç sayısal üçgenin entropilerinin sonuçları Şekil 4'de gösterilmiştir



Şekil 4. Pascal, Lucas ve Leibniz üçgenleri entropilerinin grafiği

Tablo 1. Lucas Sayılarının ve Entropilerinin Dağılımlar

n	Lucas(n) Sayıları	Normal Entropi(n)	Çift İndisli Lucas Sayıları Entropi(n)	Tek İndisli Lucas Sayıları Entropi(n)	Lucas Sayılarının Kareleri Entropi(n)
1	1	0	0	0	0
2	3	0,811278	0,881291	0,721928	0,468996
3	4	1,40564	1,25503	1,12164	1,14162
4	7	1,74647	1,42174	1,33774	1,32682
5	11	1,99044	1,49572	1,44963	1,4676
6	18	2,15219	1,52811	1,50485	1,50901
7	29	2,26653	1,54209	1,53099	1,53604
8	47	2,34467	1,54806	1,54296	1,5445
9	76	2,39885	1,55058	1,5483	1,5494
10	123	2,43579	1,55163	1,55063	1,551
11	199	2,46097	1,55207	1,55164	1,55185
12	322	2,47796	1,55225	1,55206	1,55214
13	521	2,48938	1,55232	1,55224	1,55228
14	843	2,497	1,55235	1,55232	1,55233
15	1364	2,50207	1,55236	1,55235	1,55236
16	2207	2,50543	1,55237	1,55236	1,55237
17	3571	2,50764	1,55237	1,55237	1,55237
18	5778	2,50909	1,55237	1,55237	1,55237
19	9349	2,51003	1,55237	1,55237	1,55237
20	15127	2,51065	1,55237	1,55237	1,55237
21	24476	2,51105	1,55237	1,55237	1,55237
22	39603	2,51132	1,55237	1,55237	1,55237
23	64079	2,51148	1,55237	1,55237	1,55237
24	103682	2,51159	1,55237	1,55237	1,55237
25	167761	2,51166	1,55237	1,55237	1,55237
26	271443	2,51171	1,55237	1,55237	1,55237
27	439204	2,51174	1,55237	1,55237	1,55237
28	710647	2,51176	1,55237	1,55237	1,55237
29	1149851	2,51177	1,55237	1,55237	1,55237
30	1860498	2,51178	1,55237	1,55237	1,55237
31	3010349	2,51178	1,55237	1,55237	1,55237
32	4870847	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
33	7881196	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237

34	12752043	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
35	20633239	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
36	33385282	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
37	54018521	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
38	87403803	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
39	141422324	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
40	228826127	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
41	370248451	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
42	599074578	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
43	969323029	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
44	1568397607	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
45	2537720636	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
46	4106118243	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
47	6643838879	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
48	10749957122	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237
49	17393796001	2,51179	1,55237	1,55237	1,55237

n=0 1
n=1 1 1
n=2 1 2 1
n=3 1 3 3 1
n=4 1 4 6 4 1
n=5 1 5 10 10 5 1
n=6 1 6 15 20 15 6 1
n=7 1 7 21 35 35 21 7 1
n=8 1 8 28 56 70 56 28 8 1

Şekil 5. Pascal Üçgeni

n=0 2
n=1 1 2
n=2 1 3 2
n=3 1 4 5 2
n=4 1 5 9 7 2
n=5 1 6 14 16 9 2
n=6 1 7 20 30 25 11 2
n=7 1 8 27 50 55 36 13 2
n=8 1 9 35 77 105 91 49 15 2

Şekil 6. Lucas Üçgeni

n=0 1
n=1 ½ 1/2
n=2 1/3 1/6 1/3
n=3 1/4 1/12 1/12 1/4
n=4 1/5 1/20 1/30 1/20 1/5
n=5 1/6 1/30 1/60 1/60 1/30 1/6
n=6 1/7 1/42 1/105 1/140 1/105 1/42 1/7
n=7 1/8 1/56 1/168 1/280 1/280 1/168 1/56 1/8
n=8 1/9 1/72 1/252 1/504 1/630 1/504 1/252 1/72 1/9

Şekil 7. Leibniz Üçgeni

4. Sonuç

Bu çalışmada Lucas sayılarının, tek indisli Lucas sayılarının, çift indisli Lucas sayılarının ve Lucas sayılarının karelerinin bilgi entropilerinin değerleri hesaplanmış ve daha önce elde edilen Fibonacci sayılarının entropileriyle kıyaslanmıştır. Bunlara ek olarak Pascal üçgeninin, Lucas üçgeninin ve Leibniz'in harmonik üçgeninin de entropi değerleri hesaplanmış ve değişimleri incelenmiştir. Üçgenlerin karmaşıklık değerlerinin entropi kullanılarak ölçülmesi yeni bakış açıları, üçgenlerin barındırdığı bilgi miktarını ölçmek açısından önemlidir. Üçgenlerin birbirine göre nasıl bir davranış gösterdiği bu çalışmada elde edilen sonuçlarla görülebilir.

Kaynakça

[1] I. D. Stones, "The Harmonic Triangle: Opportunities for Pattern Identification and Generalization," *Math. Teach.*, vol. 76, no. 5, 2021.

[2] C. Tsallis, M. Gell-Mann, and Y. Sato, "Asymptotically scale-invariant occupancy of phase space makes the entropy Sq extensive," *Proc. Natl. Acad. Sci.*, vol. 102, no. 43, pp. 15377–15382, Oct. 2005

[3] X. Gao and Y. Deng, "The Pseudo-Pascal Triangle of Maximum Deng Entropy," *Int. J. Comput. Commun. Control*, vol. 15, no. 1, Feb. 2020.

[4] Y. Song and Y. Deng, "Entropic Explanation of Power Set," *Int. J. Comput. Commun. Control*, vol. 16, no. 4, Aug. 2021.

[5] S. R. Nurshiami, A. Wardayani, and K. H. Setiani, "Karakteristik Segitiga Lucas," *J. Ilm. Mat. dan Pendidik. Mat.*, vol. 11, no. 1, p. 11, May 2020.

[6] N. Robbins, "The lucas triangle revisited," *Fibonacci Q.*, vol. 43, no. 2, 2005.

[7] R. Sivaraman, "On Some Properties of Leibniz's Triangle," *Math. Stat.*, vol. 9, no. 3, pp. 209–217, May 2021.

[8] İ. Tuğal, B. Şahin, A. Şahin, "The Shannon Entropy of Fibonacci Numbers", *MATI* vol. 4, no 1, pp. 12-22, Jan. 2022.